レンズの形の関数（近似式の活用）

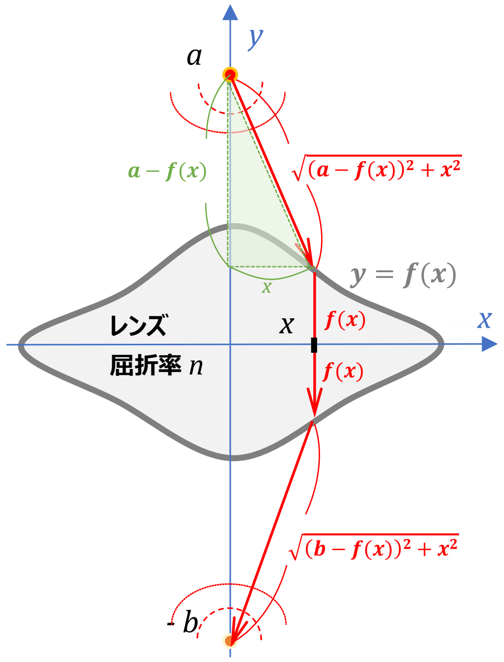
組　　番

目的『光軸上の１点 a から出た光は、レンズのどこに入射しても、必ずレンズの後方の光軸上の１点 b を通るように屈折する』

これを実現するレンズの形$\boldsymbol{y = f(x)}$はどんな関数か求める。

a から拡がった同位相の光の１つの波面が、ふたたび b で同じタイミングで １ 点に集まり、位相が打ち消し合わないようにするためには「レンズのどの部分を通った光も全て同じ光路長」でなければならない。

（別な言い方：光はレンズのどの部分を通って a から b へ行っても、かかる時間は(最小で)同じである：**フェルマー最小時間の原理**）



レンズは薄くレンズ内の光路は光軸に平行であると近似する。するとレンズ内の x を通ったときの光路長 $L(x)$は（レンズ内の光路長は経路長の屈折率 n 倍）

$$L(x) = \sqrt{(a-f(x))^2+x^2} + nf(x) + nf(x) + \sqrt{(b-f(x))^2+x^2}$$

どんな x の光路長も同じなので、全ての光路長は x=0 の光路長$\boldsymbol{L(0)}$

$$L(0) = a - f(0) + nf(0) + nf(0) + b - f(0) = a + b + 2(n-1)f(0)$$

と等しい。

したがって、レンズの形の関数 $\boldsymbol{y = f(x)}$ を決める方程式は次のようになる。

$$\sqrt{(a-f(x))^2+x^2} + 2nf(x) + \sqrt{(b-f(x))^2+x^2} = a + b + 2(n-1)f(0) \cdot\cdot\cdot (*)$$

この方程式（$*$）の解がレンズの形$\boldsymbol{y = f(x)}$である。

問題点：$\sqrt{\ }$をはずすと$f(x)$の4次方程式になり、この方程式をそのまま解くのは難しい。

そこで、大きい数と小さい数が混じった時に便利な近似式を使う。物理では非常によく使われる。

> もし $g(x)$が1より小さければ　近似式　$(1+g(x))^n \fallingdotseq 1 + ng(x)$　が成り立つ
>
> ルートのときは　$\sqrt{1+g} = (1+g)^{\frac{1}{2}}$　として使える

【課題 1】 この近似公式を利用して$(11)^2 = (10+1)^2 = 10^2(1+0.1)^2$、$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9}\sqrt{1+\frac{1}{9}}$を近似的に計算し、電卓で計算した値と比較せよ。

まず、$(a-f(x))^2$ に近似式を使う。

なぜなら　$(a-f(x))^2 = a^2\left(1-\frac{f(x)}{a}\right)^2$と書け、レンズの厚み$f(x)$は a より小さいので$\left(1-\frac{f(x)}{a}\right)^2 \fallingdotseq 1 - 2\frac{f(x)}{a}$

したがって$(a-f(x))^2 \fallingdotseq a^2\left(1-2\frac{f(x)}{a}\right) = a^2 - 2af(x)$

さらに、この近似を代入した $\sqrt{(a-f(x))^2+x^2} \fallingdotseq \sqrt{a^2-2af(x)+x^2}$ に近似式を使う。

なぜなら　$\sqrt{a^2-2af(x)+x^2} = a\sqrt{1-2\frac{f(x)}{a}+\frac{x^2}{a^2}} = a\left(1-2\frac{f(x)}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$と書け、$-2\frac{f(x)}{a}+\frac{x^2}{a^2}$は1より小さいので

$$\left(1-2\frac{f(x)}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq \left(1-\frac{f(x)}{a}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)$$

結局次のようになる。$\sqrt{(a-f(x))^2+x^2} \fallingdotseq a\left(1-2\frac{f(x)}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq a\left(1-\frac{f(x)}{a}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) = a - f(x) + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}$

【課題 2】$\sqrt{(b-f(x))^2+x^2}$も同様に 2 段階で近似を使って書き直しなさい。

方程式（$*$）は近似すると

$$a - f(x) + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a} + 2nf(x) + b - f(x) + \frac{1}{2}\frac{x^2}{b} \fallingdotseq a + b + 2(n-1)f(0) \quad \cdot\cdot\cdot (*')$$

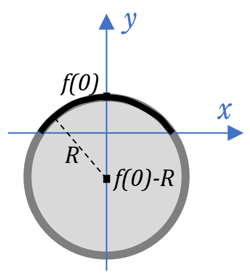
となり、これは簡単に解くことができる。

【課題 3】上の近似した方程式（$*'$）をといて、次式の空欄$\square$(文字の分数式になる)を埋めよ。

$$f(x) \fallingdotseq f(0) - \frac{(\square)}{4(n-1)}x^2 \cdot\cdot\cdot \ (**)$$

レンズの形を表す関数 $\boldsymbol{y = f(x)}$ は近似的に2次関数（$**$）になることが分かった。

この関数の形$y = f(x)$は$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$が変化しないように a,b を変えても関数の形$y = f(x)$は変わらない。



レンズの形は2次関数と分かったが、実際のレンズは球面の一部なので、次に球の断面の円を考える。

半径 R の円が中心座標（x, y）=（0，$\boldsymbol{f(0)-R}$ ）にあると考えれば

円の方程式は

$$x^2 + (y - (f(0) - R))^2 = R^2$$

y=に直すと（レンズ上面 y>0 は）

$$y = f(0) - R + \sqrt{R^2 - x^2}$$

ここで R が非常に大きく、x が R に比べて小さい範囲として $\sqrt{R^2-x^2}$ に近似式を使う。

【課題 4】以下の空欄を埋めなさい。

$$\sqrt{R^2-x^2} = R\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)^{\square} \fallingdotseq R\left(1-\square\frac{x^2}{R^2}\right) = \square$$

半径 R の円の方程式は近似的に次のように2次関数になる。

$$y \fallingdotseq f(0) - R + \square = f(0) - \frac{1}{2R}x^2 \cdot\cdot\cdot \ (***)$$

レンズの形の2次関数（$**$）と円の方程式（$***$）が同じものだとすると次式が成り立つ。

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{\frac{R}{2(n-1)}}$$

レンズの公式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$を思い出すと、レンズの形を決めている**円の半径 R** と**焦点距離 f** には次の関係が成り立つ。

$$f = \square$$